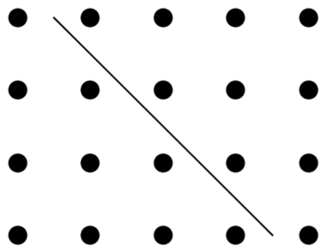
Steentjeswiskunde

1 a Schrijf de eerste tien driehoeksgetallen op.

$D(1) =$	$D(3) =$	$D(5) =$	$D(7) =$	$D(9) =$
$D(2) =$	$D(4) =$	$D(6) =$	$D(8) =$	$D(10) =$

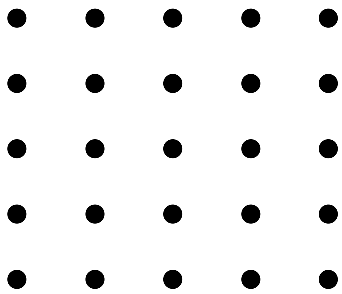
b Verdubbel alle driehoeksgetallen. Zie je regelmaat in de rij?
c Hoe groot is $D(20)$?

2 De rechthoek is verdeeld in twee gelijke driehoeksgetallen.
a Hoeveel steentjes bevat de rechthoek?
b Hoeveel groot is $D(4)$?
c Hoe groot is $D(40)$?
d Geef een formule voor $D(n)$.
e Bereken 1 + 2 + 3 + ….. + 100.



3 a Bereken $D(1) + D(2)$, $D(2) + D(3)$, $D(3) + D(4)$, ……$D(9) + D(10)$.
b Verklaar wat je ziet met steentjeswiskunde.
c Hoe groot is $D(49) + D(50)$?
d Hoe groot is $D(n-1) + D(n)$?

4 Laat in het steentjespatroon zien hoe je 5^2 kunt schrijven als som van vijf opeenvolgende oneven getallen.



5 Ook de som van de eerste n kwadraten is af te leiden met behulp van steentjespatronen.
a Verklaar het stripverhaal hieronder voor $n = 4$. Dus bereken $S(4) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2$

b Bereken $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 10^2$
c Geef een formule voor $S(n) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$

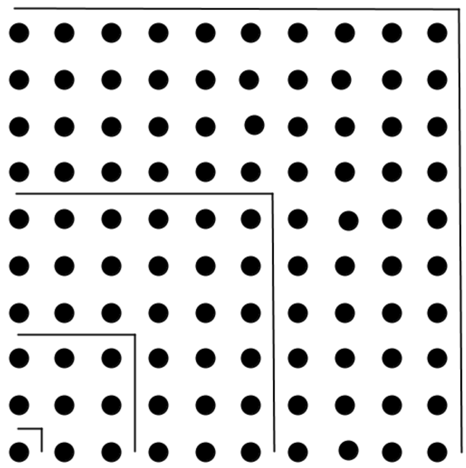
6 Tenslotte de som van de eerste *n* derde machten.

a Tel het aantal steentjes tussen de haken.

b Hoeveel is $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3$?

c Hoeveel is $1^3 + 2^3 + \ldots.. + 10^3$?

d Geef een formule voor
$S(n) = 1^3 + 2^3 + \ldots.. + n^3$



Variaties op de stelling van Pythagoras

1 Primitieve Pythagoreïsche drietallen (x, y, z) vind je met de volgende formules:
$x = m^2 - n^2$, $y = 2mn$ en $z = m^2 + n^2$, met
- $m > n$
- $m - n$ oneven
- m, n geen gemeenschappelijke delers (relatief priem)

Vul de volgende tabel in

m	n	x	y	z	x^2	y^2	z^2
2	1						
3	2						
4	1						
4	3						
5	2						
5	4						
…	…						

2 Een primitieve Pythagoreïsche viertal (x, y, z, r) vind je met het volgende recept:

- Kies twee even getallen x en y met $x + y$ deelbaar door 4.
- Ontbind $x^2 + y^2$ in twee even factoren a en b met $a > b$, $a + b$ *niet* deelbaar door 4; ½a en ½b relatief priem.
- $z = \frac{1}{2}(a - b)$ en $r = \frac{1}{2}(a + b)$

Voorbeeld:
$x = 12$, $y = 4$
$x^2 + y^2 = 144 + 16 = 160$
$a = 80$, $b = 2$ geeft

$z = 39$ en $r = 41$

Controle: $12^2 + 4^2 + 39^2 = 41^2$

a Vul onderstaande tabel verder in.

x + y		***x***	***y***		$x^2 + y^2$		***a***	***b***		***z***	***r***	***viertal***
4		2	2		8		4					
8		2	6		40		20					
							10					
		4	4		32							
12		2	10		104		52					
							26					
		4	8									
		6	6									

Sommen van kwadraten

1. Schrijf de volgende getallen als som van hoogstens vier kwadraten.

a	13	c	50	e	113	g	1001
b	27	d	63	f	127	h	2012

2 a Schrijf, zo mogelijk, als som van maximaal twee kwadraten.

1		11		21		31		41	
2		12		22		32		42	
3		13		23		33		43	
4		14		24		34		44	
5		15		25		35		45	
6		16		26		36		46	
7		17		27		37		47	
8		18		28		38		48	
9		19		29		39		49	
10		20		30		40		50	

b Probeer de overgebleven getallen te schrijven als som van zo min mogelijk kwadraten.
c Kun je een systeem ontdekken, dat wil zeggen kun je van een getal voorspellen of het te schrijven is als de som van twee kwadraten?
b Het ontdekken van een systeem wordt makkelijker als je alleen kijkt naar de priemgetallen.

3 Als m en n te schrijven zijn als som van twee kwadraten, is mn dat ook
Als $m = a^2 + b^2$ en $n = c^2 + d^2$, dan is
$mn = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ad + bc)^2 + (ac - bd)^2$
a Controleer de uitspraak door de haakjes uit te werken.

Schrijf als som van twee kwadraten:
b $65 = 5 \cdot 13$
c $221 = 13 \cdot 17$
d $1517 = 37 \cdot 41$
e $73225 = 25 \cdot 29 \cdot 101$

4 Als m en n te schrijven zijn als som van vier kwadraten, is mn dat ook.
Stel $m = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ en $n = p^2 + q^2 + r^2 + s^2$, dan is
$mn = (ap - bq - cr - ds)^2 + (aq + bp + cs - dr)^2 + (ar - bs + cp + dq)^2 + (as + br - cq + dp)^2$

Schrijf als som van hoogstens vier kwadraten.
a 77
b $777 = 3 \cdot 7 \cdot 37$

5 De driehoeksgetallen kleiner dan 100 zijn
1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55, 66, 78 en 91.

a Schrijf de getallen 1 tm 12 als som van zo min mogelijk driehoeksgetallen.

b 12 kan op twee manieren als som van drie driehoeksgetallen geschreven worden. Geef beide manieren.

c Schrijf 50 als som van drie driehoeksgetallen.

d 100 kan op zes manieren als som van maximaal drie driehoeksgetallen worden geschreven. Probeer ze alle zes te vinden.

6 Elk getal is te schrijven als de som van maximaal drie driehoeksgetallen.
Om dat te bewijzen kun je gebruik maken van de volgende stelling:

Stelling: *een getal van de vorm 8n + 3 kan worden geschreven als som van drie kwadraten van oneven getallen* dus $8n + 3 = a^2 + b^2 + c^2$ met $a = 2x + 1$, $b = 2y + 1$ en $c = 2z + 1$

Toon met behulp van de stelling aan:
$n = \frac{1}{2}x(x+1) + \frac{1}{2}y(y+1) + \frac{1}{2}z(z+1) = D(x) + D(y) + D(z)$.